

La formalisation mathématique de l'espérance¹ du nombre de groupes présents en partant d'une population initiale N s'avère malaisée. En effet, parmi les trois tirages au sort successifs, réalisés pour chaque groupe indépendamment (c'est une des zones de flou de l'article de Young), l'un d'entre eux dépend de la population présente. Par exemple, il n'est pas précisé dans l'article de Young si le $(N_i - 1)$ qui est multiplié par *proba-overcrowding* est la population présente au début de l'évaluation ou bien si elle évolue en dynamique au fur et à mesure des résultats des tirages au sort précédents.

A titre d'exemple, si une cellule est peuplée de deux groupes, la population au pas de temps suivant pourra être entre 0 et 4 selon le résultat des tirages au sort successifs :

- 0 si les deux groupes meurent, soit par "overcrowding", soit d'eux-mêmes
- 4 si les deux groupes survivent et en plus donnent naissance à un groupe chacun
- les autres valeurs 1,2,3 sont bien sûr toutes possibles, elles résultent d'une combinatoire que nous ne détaillerons pas ici.

Plus généralement à partir d'une population de N , on peut à la fin des étapes avoir entre 0 et $2N$ groupes.

Si on suppose que le N_i n'est pas recalculé dynamiquement, et que les probabilités d'événements sont faibles, alors cela simplifie les calculs analytiques et cela donne une équivalence entre Fisher-Skellam et Young.

En effet en partant d'une population de N , la population au pas de temps suivant (hors migration) est d'après Fisher-Skellam :

$$N' = \alpha N \left(1 - \frac{N}{K}\right) = N + (\alpha - 1)N - \frac{\alpha}{K} N^2$$

Dans le modèle de Young, si on part d'une population N , on a déjà vu que la population future pouvait être tout nombre compris entre 0 et $2N$. Mais en moyenne, si on prend les quatre événements (naissance, mort, surpeuplement, migration) présentés par Young en supposant qu'ils sont indépendants et acceptables si N est relativement grand et les probabilités relativement faibles, alors, l'espérance de N' au pas de temps suivant (hors migration) :

$$N' = N - \text{proba}_{\text{death}} \times N - \text{proba}_{\text{overcrowding}} \times (N - 1) \times N + \text{proba}_{\text{birth}} \times N$$

$$\text{soit, } N' = N + (\text{proba}_{\text{birth}} - \text{proba}_{\text{death}} + \text{proba}_{\text{overcrowding}}) \times N - \text{proba}_{\text{overcrowding}} \times N^2$$

Autrement dit, les deux formulations sont en moyenne, selon les hypothèses précédentes, équivalentes (c'est-à-dire conduisant à une dynamique numériquement identique) avec :

$$\alpha - 1 = \text{proba}_{\text{birth}} - \text{proba}_{\text{death}} + \text{proba}_{\text{overcrowding}}$$

$$\frac{\alpha}{K} = \text{proba}_{\text{overcrowding}}$$

Ce qu'on peut reformuler, si *proba-overcrowding* > 0 (sans quoi il n'y a pas d'équivalence)

$$\text{en : } \alpha = 1 + \text{proba}_{\text{birth}} - \text{proba}_{\text{death}} + \text{proba}_{\text{overcrowding}}$$

$$\text{et } K = 1 + \frac{1 + \text{proba}_{\text{birth}} - \text{proba}_{\text{death}}}{\text{proba}_{\text{overcrowding}}}$$

¹ Il s'agit ici du nombre de groupes que l'on s'attend à trouver, en moyenne, à partir d'une configuration initiale donnée, si l'on répète un grand nombre de fois la même simulation.